Subject

بنام خدا

فصل ۹ : میدان مغناطیسی

هدف ما در این فصل محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی است. تجربه نشان داده که در اطراف سیم حامل جریان الکتریکی، میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. برای محاسبه میدان به دو روش خواهیم پرداخت:

۱- قانون بیو ساوار (ش به روش مستقیم در محاسبه میدان الکتریکی).

۲- قانون آمپر (ش به قانون گاوس در محاسبه میدان الکتریکی).

قانون بیو ساوار: هنگامی که از یک سیم، جریان i می‌گذرد، برای محاسبه میدان اطراف سیم، ابتدا سیم را به عناصر کوچک $d\vec{l}$ در جهت جریان تقسیم کرده، فاصله المان $d\vec{l}$ تا نقطه مورد نظر (جایی که می‌خواهیم میدان مغناطیسی را در آن محاسبه کنیم) تعیین کرده

$\vec{r}$ (جهت $\vec{r}$ از المان $d\vec{l}$ به نقطه مورد نظر) و در این صورت:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\right)$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \frac{Tm}{A}$ تراوایی خلاء.

$d\vec{B}$ بر $d\vec{l}$ و $\vec{r}$ عمود است و جهت با قاعده دست راست. (شست دست راست را در جهت جریان قرار داده، جهت بسته شدن انگشتان، جهت میدان را نشان می‌دهد).

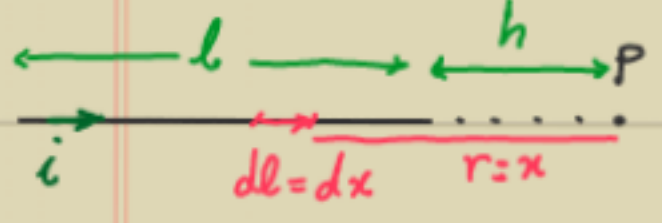
$$|d\vec{l}\times\vec{r}| = dl\, r \sin\theta$$

رابطه فوق به قانون بیو و ار معروف است.

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{(dl\sin\theta)}{r^2}$$

با انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب، در صورت نیاز dB را به مولفه‌های آن تجزیه کرده و روی طول سیم از آن انتگرال‌گیری می‌کنیم.

مثال ۱- از سیم مستقیمی به طول l، جریان i مطابق شکل می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای واقع بر امتداد سیم، به فاصله h از یک سر آن حساب کنید.



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{dl\sin\theta}{r^2}\right) \xrightarrow{\theta=0} dB = 0 \rightarrow B = 0$$

نتیجه: سیم حامل جریان در نقاط واقع بر امتداد خود ($\theta = 0$ یا $\theta = \pi$) میدان مغناطیسی ایجاد نمی‌کند.

مثال ۲- برای سیم حامل جریان i در مثال ۱، میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای به فاصله عمودی h از یک سر سیم حساب کنید.

$$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{dl\sin\theta}{r^2}\right)=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{dx\ h}{(x^2+h^2)^{3/2}}\right)$$

جهت میدان در نقطه P درون‌سو است و با جابجا کردن المان، جهت dB تغییر نمی‌کند. نیاز به تجزیه ندارد.

$$B=\int dB=\frac{\mu_0 i h}{4\pi}\int_0^{l}\frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 i h}{4\pi}\left(\frac{x}{h^2\sqrt{x^2+h^2}}\right)_0^{l}$$

$$B_P=\frac{\mu_0 i\ l}{4\pi h\sqrt{l^2+h^2}}$$

مثال ۳- برای سیم حامل جریان i مثال ۱، میدان مغناطیسی را روی عمود منصف سیم، به فاصله h از سیم حساب کنید.

مراحل کاملاً مثل به مثال ۲ است، فقط محدوده انتگرال از $-\frac{l}{2}$ تا $\frac{l}{2}$ خواهد بود.

$$B_P=\int dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi h}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)_{-l/2}^{l/2}=\frac{\mu_0 i l}{4\pi h\sqrt{\frac{l^2}{4}+h^2}}$$

درونسو.

مثال ۴- میدان مغناطیسی سیم مستقیم نامتناهی با جریان i را در نقطه‌ای به فاصله h از سیم حساب کنید.

مراحل دقیقاً با مثال ۲ یکسان است، فقط محدوده انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ است.

$$B_P=\frac{\mu_0 i}{4\pi h}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)_{-\infty}^{\infty}\longrightarrow B_P=\frac{\mu_0 i}{2\pi h}$$

درونسو.

مثال ۵- از یک سیم به شکل ربع دایره به شعاع R، جریان i مطابق شکل می‌گذرد. میدان مغناطیسی در مرکز ربع دایره چقدر است؟

$$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl\sin\theta}{r^2}=\frac{\mu_0 i\ dl}{4\pi R^2}$$

نیاز به تجزیه کردن ندارد.

$$B_P=\int dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\int dl=\frac{\mu_0 i\ l}{4\pi R^2}\quad ,\quad \text{طول کمان } l=\frac{\pi}{2}R$$

$$\rightarrow B_P=\frac{\mu_0 i}{8R}$$

درونسو.

مثال ۶. از یک سیم به شکل کمان دایره به شعاع R، مقابل زاویه مرکزی β، جریان i مطابق شکل می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در مرکز کمان حساب کنید.

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{dl\sin\theta}{r^2}\right) \rightarrow dB = \frac{\mu_0 i\, dl}{4\pi R^2}$$

$$B_P = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\int dl = \frac{\mu_0 i l}{4\pi R^2}, \quad \text{طول کمان } l = R\beta \rightarrow B_P = \frac{\mu_0 i \beta}{4\pi R}$$

حالت‌های خاص:

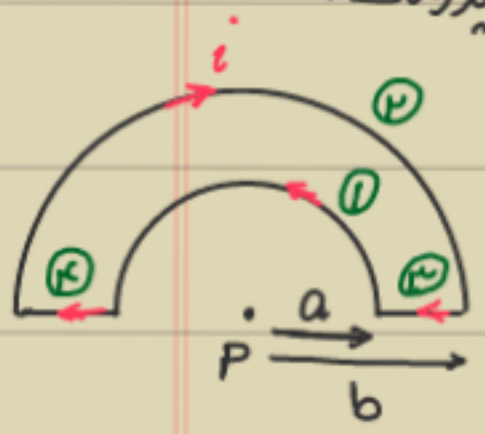
سیم به شکل ربع دایره $\beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{8R}$

سیم به شکل نیم‌دایره $\beta = \pi \longrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4R}$

سیم به شکل سه ربع دایره $\beta = \frac{3\pi}{2} \rightarrow B = \frac{3\mu_0 i}{8R}$

سیم به شکل دایره $\rightarrow$ حلقهٔ جریان $\beta = 2\pi \longrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2R}$

مثال ۷. از یک سیم مطابق شکل، جریان i می‌گذرد. میدان مغناطیسی در نقطه P چقدر است.



شکل‌های ترکیبی را به اجزای ساده تقسیم کرده و از اصل برهم‌نهی استفاده می‌کنیم.

$$\vec{B}_P = \sum \vec{B}_i = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$$

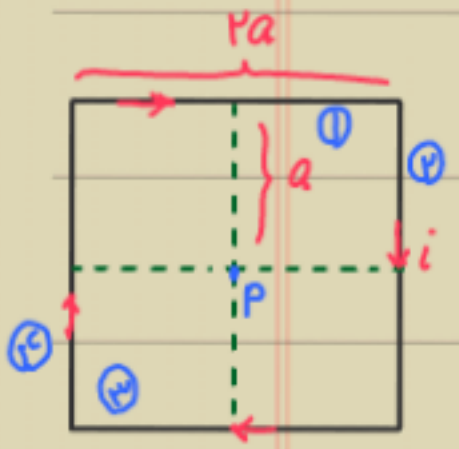
سیم ۳ و ۴ مقدار خود $B_3 = B_4 = 0$ میدان ایجاد نمی‌کند.

B_1 میدان نیم‌دایره به شعاع a $= \frac{\mu_0 i}{4a}$ (بردونو)

B_2 میدان نیم‌دایره به شعاع b $= \frac{\mu_0 i}{4b}$ (درونسو)

اگر بردونو + فرض شود $B_P = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 i}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

مثال ۸. از یک حلقه به شکل مربع به ضلع $2a$ جریان i می‌گذرد. میدان مغناطیسی در مرکز مربع چقدر است؟



نقطه P روی عمود منصف اضلاع مربع و به فاصله a از هر سیم قرار دارد. با استفاده از مثال ۳:

$$B = \frac{\mu_0 i\, l}{4\pi h\sqrt{\frac{l^2}{4}+h^2}} \xrightarrow[h=a]{l=2a} B_1 = \frac{\mu_0 i(2a)}{4\pi a\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a\sqrt{2}} = B_2 = B_3 = B_4$$

$$B_P = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \rightarrow B = 4B_1 = \frac{2\mu_0 i}{\pi a\sqrt{2}} \quad \text{درونسو}$$

مثال ۹. میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه حامل جریان i به شعاع R و جریان i در روی محور حلقه، به فاصله x از مرکز آن، چقدر است.

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{dl \sin\theta}{r^2}\right) = \frac{\mu_0 i\, dl}{4\pi(x^2+R^2)}$$

$\sin\gamma = \frac{x}{r}$ ، $\cos\gamma = \frac{R}{r}$

با جابجایی dl ها، جهت میدان تغییر می‌کند پس باید تجزیه شود.

$dB_\perp = dB\sin\gamma$ ⟶ $B_\perp = 0$ به دلیل تقارن مولفه‌ی عمودی میدان با هم خنثی می‌شوند

$$dB_{//} = dB\cos\gamma = \frac{\mu_0 i\, dl}{4\pi(x^2+R^2)}\cdot\frac{R}{\sqrt{(x^2+R^2)}} = \frac{\mu_0 i R\, dl}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$B_{//} = \int dB_{//} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}\int dl = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}(2\pi R) \rightarrow B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

حالتهای خاص:

در مرکز حلقه $x=0$ ⟵ $B = \frac{\mu_0 i}{2R}$

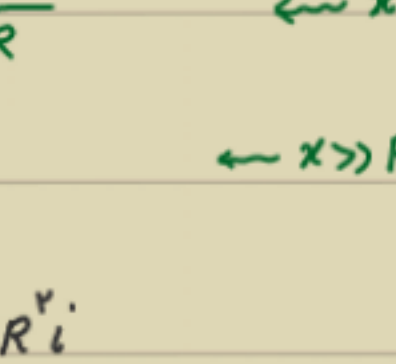
برای نقاط دور $x \gg R$ ⟵ $B = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3}$

برحسب گشتاور دوقطبی مغناطیسی μ.

$$\mu = NiA = (1)(i)(\pi R^2) = \pi R^2 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i \pi R^2}{2\pi(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi(x^2+R^2)^{3/2}}$$

قانون آمپر: برای یک سیم مستقیم و نامتناهی حامل جریان i، مشاهده شده که خطوط میدان در اطراف سیم به شکل دایره‌ی متحدالمرکزند که سیم در مرکز قرار گرفته و تراکم خطوط نزدیک سیم بیشتر است.



اگر مقطع سیم را در نظر بگیریم:

میدان مغناطیسی بر فاصله و سیم عمود است،

اگر مسیر بسته‌ای اطراف سیم حامل جریان گرفته شود، همواره خواهیم داشت: $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i_{in}$

رابطه بالا به قانون آمپر معروف است که در آن: B میدان مغناطیسی، dl المان طول از مسیر بسته.

μ_0 ثابت تراوش پذیری خلاء. i_{in} جریان خالص داخل مسیر بسته است.

✓ به قانون گاوس در الکتریسیته، قانون آمپر هم در حالت کلی صادق است ولی برای استفاده در مسایل ساده سازی صورت نمی‌گیرد و به همین علت محدودیت در کاربرد ایجاد می‌شود.

برای استفاده از قانون آمپر مراحل زیر انجام می‌شود:

انتخاب یک مسیر بسته مناسب (پربند آمپری) که: ۱- از نقطه مورد نظر بگذرد ۲- زاویه میان مسیر پربند با میدان همه جا صفر باشد (یا در برخی نقاط زاویه صفر و در سایر نقاط زاویه 90°) ۳- مقدار میدان روی پربند ثابت باشد.

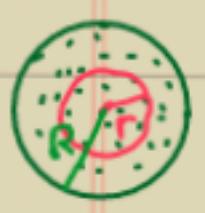
این شرایط، دامنه حل مسائل را محدود می‌کند به: الف) جایی که خطوط میدان به صورت دایره باشند (سیم مستقیم بلند با مقطع دایره) که پربند آمپری به شکل دایره به شعاع r است. ب) وقتی خطوط میدان حوازی (میدان یکنواخت) است پربند آمپری به شکل مستطیل انتخاب می‌شود.

مثال ۱۰- میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم نازک مستقیم و نامتناهی با جریان i را در نقطه‌ای به فاصله r از سیم حساب کنید.

پربند آمپری به شکل دایره به شعاع r گرفته و آنرا در جهت میدان دور می‌زنیم.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in} \rightarrow \oint B\,dl\cos 0 = \oint B\,dl = B\,l = B\,2\pi r = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

مثال ۱۱- از یک کابل مستقیم و طویل با شعاع R جریان i با چگالی جریان ثابت می‌گذرد. میدان مغناطیسی را داخل و خارج کابل محاسبه کنید. (جریان برونسو).



$$r<R \rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in} \rightarrow B\,2\pi r = \mu_0 i_{in}$$

چون جریان یکنواخت است:

از کل سطح مقطع	جریان کل
πR^2	i
πr^2	i_{in}
از سطح مقطع آمپری	

$$\rightarrow i_{in} = i\frac{r^2}{R^2}$$

$$B\,2\pi r = \mu_0 i\frac{r^2}{R^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

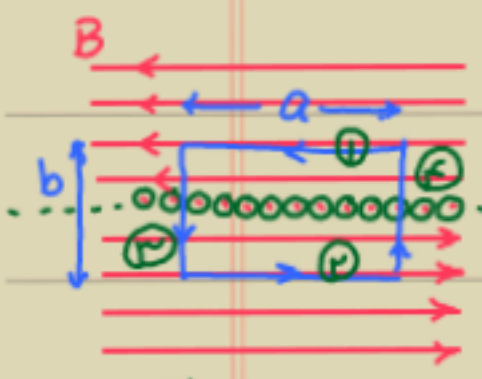
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in} \rightarrow B\,2\pi r = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

مثال ۱۲- از یک کابل مستقیم طویل با شعاع R، جریانی با چگالی $J = Ar$ (A ثابت) می‌گذرد. میدان مغناطیسی را داخل و خارج کابل بدست آورید.

$r<R$:
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in} \rightarrow B\,2\pi r = \mu_0 i_{in}$$
$$i_{in} = \int J\,ds = \int_0^r Ar\,2\pi r\,dr = 2\pi A\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^r = \frac{2\pi A r^4}{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\} \rightarrow B\,2\pi r = \mu_0 \frac{2\pi A r^4}{4} \rightarrow B = \frac{\mu_0 A r^3}{4}$$

$r>R$:
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in} \rightarrow B\,2\pi r = \mu_0 i_{in}$$
$$i_{in} = \int_0^r J\,ds = \int_0^R Ar\,2\pi r\,dr + \int_R^r 0 = 2\pi A\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^R = \frac{2\pi A R^4}{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\} \rightarrow B\,2\pi r = \mu_0 \frac{2\pi A R^4}{4} \rightarrow B = \frac{\mu_0 A R^4}{4r}$$

۱۳- تعدادی سیم نازک مستقیم حامل جریان‌های همسوی مساوی i کنار هم در یک صفحه قرار گرفته‌اند (تعداد سیم در واحد طول n). میدان مغناطیسی را در نقاط اطراف این مجموعه حساب کنید.



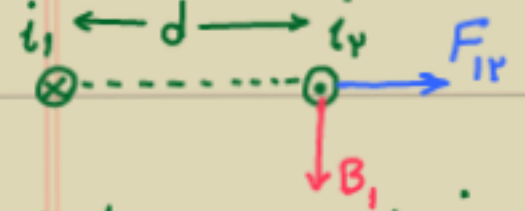
با توجه به شکل خطوط میدان، پرنبد آمپری به شکل مستطیل در نظر گرفته شده است.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in} \rightsquigarrow \int_1 B\,dl\cos 0 + \int_2 B\,dl\cos 0 + \int_3 B\,dl\cos 90 + \int_4 B\,dl\cos 90 = \mu_0 i_{in}$$

در واحد طول	تعداد سیم	از هر سیم	جریان i
1	n		
$\rightsquigarrow x = na$			$\rightarrow i_{in} = nai$
در طول پرنبد a	x	na از	i_{in}

$$\rightarrow Ba + Ba = \mu_0 nai \rightarrow B = \frac{\mu_0 ni}{2}$$

۱۴- از دو سیم موازی جریان‌های i_1 و i_2 خلاف جهت هم می‌گذرد. فاصله میان دو سیم برابر d است. نیروی که یک سیم بر طول l از سیم دیگر وارد می‌کند، چقدر است؟



میدان سیم ① در محل سیم ② $B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$ $\rightarrow$ $F_{12} = i_2 l B_1 \sin 90 \Rightarrow F_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi d}$

دو سیم با جریان‌های مخالف، یکدیگر را دفع می‌کنند.

۱۵- سیم نازکی را به شکل سیملوله (فنر) درآورده و از آن جریان i می‌گذرد. اگر تعداد دورهای سیملوله در واحد طول n باشد،

میدان مغناطیسی داخل و خارج سیملوله چقدر است؟

میدان ناشی از مقطع سیم ۴ در بالا و پائین میدان ۴ را با جهت مخالف ایجاد می‌کند. خارج سیملوله میدان صفر است.

پر بند آمپری به شکل مستطیل به طول a و عرض b (مانند شکل ۱۳) در نظر گرفته شود.

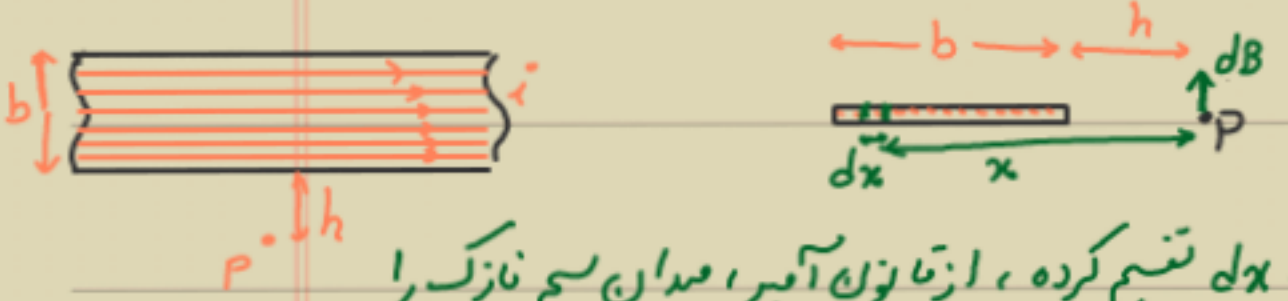
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in}$$

$$\int_{①} B\,dl\cos 0 + \int_{②} B\,dl\cos 90 + \int_{③} 0 + \int_{④} B\,dl\cos 90 = BA = \mu_0 i_{in} \Rightarrow BA = \mu_0 nai$$

$$i_{in} = \text{تعداد سیم} \times i = nai$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 ni$$

مثال ۱۶- از یک نوار نازک و طویل به پهنای b، جریان یکنواخت i می‌گذرد. میدان مغناطیسی در نقطه‌ای واقع در صفحه نوار و به فاصله h از یک طرف نوار چقدر است؟

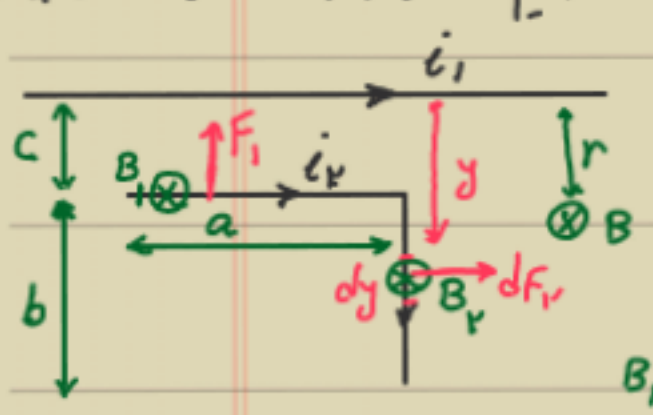


نوار را به تعداد بی‌نهایت سیم نازک (سیم) به پهنای dx تقسیم کرده، از قانون آمپر، میدان سیم نازک را استفاده می‌کنیم.

$$dB = \frac{\mu_0\, di}{2\pi x}, \quad di = \frac{i}{b}dx \rightarrow dB = \frac{\mu_0 i\, dx}{2\pi b x}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi b}\int_h^{b+h}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi b}\left[\ln x\right]_h^{b+h} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi b}\ln\left(\frac{b+h}{h}\right)$$

مثال ۱۷- از یک سیم مستقیم طویل جریان i_1 می‌گذرد. سیمی با جریان i_2 مطابق شکل، کنار سیم ① قرار گرفته. نیروی وارد بر سیم ② از طرف سیم ① چقدر است؟



میدان سیم ① در نقطه‌ای به فاصله r از سیم $B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi c} \rightarrow F_1 = i_2 a B_1 \sin 90 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi c}$$

میدان در نقطه‌ای به فاصله y از سیم ① $B_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi y}$ → میدان بر عنصر جریان ② عمود است $dF_2 = i_2\, dy\, B_2 \sin 90 = \frac{\mu_0 i_1 i_2\, dy}{2\pi y}$

$$F_2 = \int_c^{b+c} dF_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\int_c^{b+c}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\left(\ln y\right)_c^{b+c} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)$$

$$\vec{F} = F_2\hat{i} + F_1\hat{j}$$